

ANNA ĆWIAKAŁA-MAŁYS, WIOLETTA NOWAK

Uniwersytet Wrocławski

DEKOMPOZYCJA INDEKSU PRODUKTYWNOŚCI MALMQUISTA W MODELU DEA

I. WPROWADZENIE

W celu oceny sprawności działania podmiotu gospodarczego bada się jego produktywność. Jeśli podmiot przetwarza jeden nakład w jeden wynik, to produktywność oblicza się jako iloraz rzeczywistego poziomu wyniku do rzeczywistego poziomu nakładu. Im więcej produktu przypada na jednostkę nakładu, tym większa jest produktywność podmiotu. W przypadku produkcji wielu produktów za pomocą wielu nakładów produktywność podmiotu wyznacza się jako iloraz ważonej sumy wyników do ważonej sumy nakładów. Gdy wagami są odpowiednio rynkowe ceny wyników i nakładów, wtedy produktywność jest ilorazem uzyskiwanego przez podmiot przychodu (wartości wyników) do ponoszonego kosztu (wartości nakładów). W praktyce najczęściej stosuje się definicję produktywności, która nie zakłada znajomości rynkowych cen wyników i nakładów. Jednak, wykorzystane do agregacji wyników i nakładów wagi, zwane cenami dualnymi, muszą być nieujemne oraz mieć takie wartości, by produktywność danego podmiotu nie była większa od jedności.

Uzyskaną przez dany podmiot relację wyników do nakładów można zestawiać z produktywnością innych podmiotów. Porównanie produktywności podmiotu z maksymalną możliwą do osiągnięcia w danych warunkach technicznych produktywnością, czyli produktywnością podmiotu wzorcowego, pozwala określić poziom jego technicznej efektywności.

W analizie produktywności podmiotu gospodarczego interesującą kwestią jest porównywanie jej zmian w czasie. Do badania zmian produktywności najczęściej wykorzystuje się indeksy Törnqvista, Fishera oraz Malmquista. Jeśli znane są ceny rynkowe nakładów i wyników, wtedy stosuje się indeksy Törnqvista i Fishera. Z kolei indeks produktywności Malmquista znajduje zastosowanie, gdy ceny rynkowe nakładów i wyników nie są wymagane. W związku z tym jest częściej używany w praktyce.

Dla celów analitycznych istotne jest nie tylko porównanie osiągananej przez dany podmiot relacji wyników do nakładów w różnych okresach, ale także analiza czynników, które wywołały zmianę jego produktywności. By ustalić przyczyny zmian produktywności w czasie, stosuje się różne dekompozycje indeksu produktywności Malmquista.

Celem niniejszego artykułu jest analiza porównawcza stosowanych w literaturze przedmiotu rozkładów indeksu Malmquista. Dekompozycje indeksu przeprowadza się, wykorzystując metodę granicznej analizy danych.

II. GRANICZNA ANALIZA DANYCH

Graniczna analiza danych (Data Envelopment Analysis — DEA) jest jedną z najczęściej stosowanych nieparametrycznych metod pomiaru efektywności technicznej. Jej podstawy po raz pierwszy zaprezentowali A. Charnes, W.W. Cooper i E. Rhodes w 1978 roku¹. Intensywny rozwój DEA nastąpił w drugiej połowie lat 90. XX wieku.

Metoda umożliwia zbadanie efektywności technicznej w grupie podmiotów, które za pomocą wielu nakładów uzyskują wiele wyników. Na podstawie danych empirycznych wyodrębnia się podmioty najbardziej produktywne. Podmioty te wyznaczają krawędź zbioru możliwości produkcyjnych (krzywą efektywności). Jednostki znajdujące się poza tą krzywą są technicznie nieefektywne. W celu wyznaczenia efektywności danego podmiotu rozwiązuje się odpowiednie zadanie programowania liniowego.

Na wartość technicznej efektywności ma wpływ rodzaj korzyści skali i orientacji modelu. Ze względu na korzyści skali wyróżnia się modele DEA o stałych i zmiennych korzyściach skali. Kryterium korzyści skali ma wpływ na sposób wyznaczania krzywej efektywności. W modelu DEA o stałych korzyściach skali krzywa efektywności dla podmiotów, które wytwarzają jeden wynik za pomocą jednego nakładu, jest linią prostą o nachyleniu równym produktywności podmiotu wzorcowego. Z kolei w modelu DEA o zmiennych korzyściach skali, krzywa efektywności jest krzywą wypukłą, której wierzchołki tworzą jednostki o najwyższych produktywnościach.

Model DEA może być modelem niezorientowanym lub zorientowanym, przy czym kryterium orientacji formułuje się w odniesieniu do nakładów lub wyników. W modelach zorientowanych wartość wyniku efektywności pokazuje zmianę w nakładach lub wynikach, która powoduje, że dany podmiot staje się efektywny. Efektywność techniczna zorientowana na wyniki danego podmiotu jest ilorazem jego produktywności do produktywności podmiotu, który osiąga maksymalny wynik z danego nakładu. Z kolei, efektywność techniczna zorientowana na nakłady

¹ A. Charnes, W.W. Cooper, E.L. Rhodes, *Measuring the efficiency of decision making units*, „European Journal of Operational Research” 1978, nr 2, s. 429–444.

jest ilorazem produktywności danego podmiotu do produktywności podmiotu, który osiąga dany wynik za pomocą minimalnego nakładu².

Miary technicznej efektywności uzyskane w modelach DEA o stałych i zmiennych korzyściach skali wykorzystuje się do wieloczynnikowego rozkładu indeksu produktywności Malmquista.

III. SPOSOBY ROZKŁADU INDEKSU PRODUKTYWNOŚCI MALMQUISTA

Indeks produktywności Malmquista służy do porównania osiągniętej przez dany podmiot relacji wyników do nakładów w dwóch różnych okresach. Jeśli podmiot za pomocą nakładu x otrzymuje wynik y , to indeks ten jest obliczany według wzoru:

$$M = \frac{y^{t+1}/x^{t+1}}{y^t/x^t}, \quad (1)$$

gdzie: y^t/x^t — produktywność podmiotu w chwili t , y^{t+1}/x^{t+1} — produktywność podmiotu w chwili $t+1$. Indeks (1) mierzy zmianę produktywności w okresie t i $t+1$. Produktywność jednostki zmniejsza się, jeśli $M < 1$, nie zmienia się, gdy $M = 1$, oraz poprawia się, gdy $M > 1$.

W celu identyfikacji czynników mających wpływ na zmianę produktywności danego podmiotu w czasie, indeks Malmquista (1) zapisuje się w języku miar technicznej efektywności wyznaczonych w modelu granicznej analizy danych.

W modelu DEA o stałych korzyściach skali indeks (1) ma postać:

$$M = \sqrt{\frac{\theta_c^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{\theta_c^t(x^t, y^t)} \cdot \frac{\theta_c^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{\theta_c^{t+1}(x^t, y^t)}}, \quad (2)$$

gdzie: $\theta_c^t(x^t, y^t)$ — techniczna efektywność podmiotu w okresie t , $\theta_c^t(x^{t+1}, y^{t+1})$ — techniczna efektywność podmiotu dla danych z okresu $t+1$ i technologii w okresie t , $\theta_c^{t+1}(x^t, y^t)$ — techniczna efektywność podmiotu dla danych z okresu t i technologii w okresie $t+1$, $\theta_c^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})$ — techniczna efektywność podmiotu w okresie $t+1$.

Poszczególne miary technicznej efektywności otrzymuje się, rozwiązując zadanie dualne w modelu DEA o stałych korzyściach skali zorientowanym na wyniki lub nakłady. Sposób wyznaczenia poszczególnych miar technicznej efektywności w przypadku n podmiotów gospodarczych wykorzystujących m takich samych nakładów (w różnych ilościach) w celu otrzymania s takich samych wyników (o różnych poziomach) przedstawiono w tabeli 1.

² A. Ćwiąkała-Małys, W. Nowak, *Nieparametryczne i parametryczne metody pomiaru efektywności*, „Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu” 2009, nr 61, s. 197–210; *eaedem*, *Sposoby klasyfikacji modeli DEA*, „Badania Operacyjne i Decyzje” 2009, nr 3, s. 5–18.

Tabela 1. Zadanie dualne w modelu DEA o stałych korzyściach skali

Orientacja na wyniki	Orientacja na nakłady
$\theta_c^t(x^t, y^t) = \max \theta$ przy ograniczeniach: $\sum_{j=1}^n y_{rj}^t \lambda_j \geq y_{r0}^t / \theta,$ $\sum_{j=1}^n x_{ij}^t \lambda_j \leq x_{i0}^t,$ $\lambda_j \geq 0, \quad r=1,2,\dots,s, \quad i=1,2,\dots,m$	$\theta_c^t(x^t, y^t) = \min \theta$ przy ograniczeniach: $\sum_{j=1}^n x_{ij}^t \lambda_j \leq \theta x_{i0}^t,$ $\sum_{j=1}^n y_{rj}^t \lambda_j \geq y_{r0}^t,$ $\lambda_j \geq 0, \quad r=1,2,\dots,s, \quad i=1,2,\dots,m$
$\theta_c^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}) = \max \theta$ przy ograniczeniach: $\sum_{j=1}^n y_{rj}^t \lambda_j \geq y_{r0}^{t+1} / \theta,$ $\sum_{j=1}^n x_{ij}^t \lambda_j \leq x_{i0}^{t+1},$ $\lambda_j \geq 0, \quad r=1,2,\dots,s, \quad i=1,2,\dots,m$	$\theta_c^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}) = \min \theta$ przy ograniczeniach: $\sum_{j=1}^n x_{ij}^t \lambda_j \leq \theta x_{i0}^{t+1},$ $\sum_{j=1}^n y_{rj}^t \lambda_j \geq y_{r0}^{t+1},$ $\lambda_j \geq 0, \quad r=1,2,\dots,s, \quad i=1,2,\dots,m$
$\theta_c^{t+1}(x^t, y^t) = \max \theta$ przy ograniczeniach: $\sum_{j=1}^n y_{rj}^{t+1} \lambda_j \geq y_{r0}^t / \theta,$ $\sum_{j=1}^n x_{ij}^{t+1} \lambda_j \leq x_{i0}^t,$ $\lambda_j \geq 0, \quad r=1,2,\dots,s, \quad i=1,2,\dots,m$	$\theta_c^{t+1}(x^t, y^t) = \min \theta$ przy ograniczeniach: $\sum_{j=1}^n x_{ij}^{t+1} \lambda_j \leq \theta x_{i0}^t,$ $\sum_{j=1}^n y_{rj}^{t+1} \lambda_j \geq y_{r0}^t,$ $\lambda_j \geq 0, \quad r=1,2,\dots,s, \quad i=1,2,\dots,m$
$\theta_c^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}) = \max \theta$ przy ograniczeniach: $\sum_{j=1}^n y_{rj}^{t+1} \lambda_j \geq y_{r0}^{t+1} / \theta,$ $\sum_{j=1}^n x_{ij}^{t+1} \lambda_j \leq x_{i0}^{t+1},$ $\lambda_j \geq 0, \quad r=1,2,\dots,s, \quad i=1,2,\dots,m$	$\theta_c^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}) = \min \theta$ przy ograniczeniach: $\sum_{j=1}^n x_{ij}^{t+1} \lambda_j \leq \theta x_{i0}^{t+1},$ $\sum_{j=1}^n y_{rj}^{t+1} \lambda_j \geq y_{r0}^{t+1},$ $\lambda_j \geq 0, \quad r=1,2,\dots,s, \quad i=1,2,\dots,m$

Źródło: opracowanie własne.

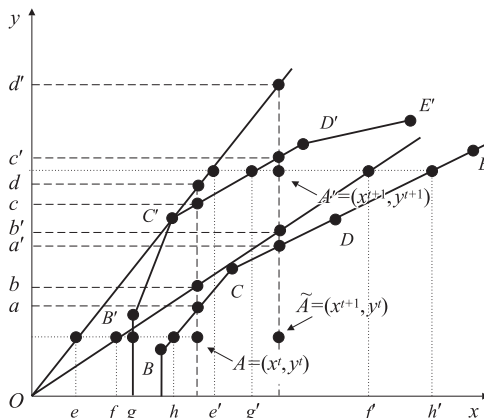
Zmienna decyzyjna λ_j jest wagą dla j -tej jednostki. Indeks 0 stosuje się dla oznaczenia jednostki, dla której są prowadzone obliczenia³.

Ze względu na to, że istnieją dwa podstawowe rodzaje miar efektywności, wyróżnia się indeks Malmquista zorientowany na wyniki i indeks zorientowany na nakłady. W pierwszym podejściu różnice w produktywności traktuje się jako różnice w poziomie maksymalnego produktu dla danych poziomów nakładów. Natomiast w drugim różnice w produktywności wynikają z różnic

³ Zadanie dualne wzbogacone o warunek $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ pozwala wyznaczyć miary technicznej efektywności w modelu DEA o zmiennych korzyściach skali.

w minimalnych nakładach potrzebnych do wyprodukowania danego poziomu nakładu⁴.

Miary technicznej efektywności oraz indeks produktywności Malmquista można przedstawić graficznie. W tym celu wykorzystuje się ryc. 1.



Ryc. 1. Konstrukcja indeksu produktywności Malmquista zorientowanego na nakłady i na wyniki dla podmiotu A w modelu DEA o stałych i zmiennych korzyściach skali

Źródło: opracowanie własne.

Na ryc. 1 zaznaczono poziom nakładu i wyniku hipotetycznego podmiotu A w okresie t i $t+1$. Ponadto zaznaczono granice efektywności w obu okresach wyznaczone w modelu DEA przy założeniu stałych i zmiennych korzyści skali.

Geometryczna interpretacja poszczególnych miar technicznej efektywności zorientowanej na wyniki i nakłady została ukazana za pomocą wzorów zebranych w tabeli 2.

Tabela 2. Efektywność techniczna i efektywność skali w modelu DEA

Efektywność techniczna					
Model DEA — stałe korzyści skali			Model DEA — zmienne korzyści skali		
	Orientacja na wyniki	Orientacja na nakłady		Orientacja na wyniki	Orientacja na nakłady
$\theta_c^t(x^t, y^t)$	y^t/b	f/x^t	$\theta_v^t(x^t, y^t)$	y^t/a	h/x^t
$\theta_c^t(x^{t+1}, y^{t+1})$	y^{t+1}/b'	f'/x^{t+1}	$\theta_v^t(x^{t+1}, y^{t+1})$	y^{t+1}/a'	h'/x^{t+1}
$\theta_c^{t+1}(x^t, y^{t+1})$	y^t/d	e/x^t	$\theta_v^{t+1}(x^t, y^t)$	y^t/c	g/x^t
$\theta_c^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})$	y^{t+1}/d'	e'/x^{t+1}	$\theta_v^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})$	y^{t+1}/c'	g'/x^{t+1}

⁴ A. Cwiąkała-Małys, W. Nowak, *Wybrane metody pomiaru efektywności podmiotu gospodarczego*, Wrocław 2009.

cd. tabeli 2

Efektywność techniczna					
Model DEA — stałe korzyści skali			Model DEA — zmienne korzyści skali		
	Orientacja na wyniki	Orientacja na nakłady		Orientacja na wyniki	Orientacja na nakłady
			$\theta_v^t(x^{t+1}, y^t)$	y^t / b'	
			$\theta_v^{t+1}(x^{t+1}, y^t)$	y^t / d'	
Efektywność skali					
		zorientowana na wyniki		zorientowana na nakłady	
$SE^t(x^t, y^t) = \frac{\theta_c^t(x^t, y^t)}{\theta_v^t(x^t, y^t)}$		a/b		f/h	
$SE^t(x^{t+1}, y^{t+1}) = \frac{\theta_c^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{\theta_v^t(x^{t+1}, y^{t+1})}$		a' / b'		f' / h'	
$SE^{t+1}(x^t, y^t) = \frac{\theta_c^{t+1}(x^t, y^t)}{\theta_v^{t+1}(x^t, y^t)}$		c/d		e/g	
$SE^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}) = \frac{\theta_c^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{\theta_v^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}$		c' / d'		e' / g'	

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 2 umieszczono także wzory pozwalające zinterpretować efektywność techniczną zorientowaną na wyniki i nakłady w modelu DEA o zmiennych korzyściach skali oraz efektywność skali⁵. Wielkości te są wykorzystywane w kolejnych rozkładach indeksu Malmquista.

Indeks produktywności (2) można zapisać jako iloczyn różnych czynników. Najprostszy dwuczynnikowy rozkład indeksu produktywności Malmquista, zaproponowany przez Färe'a *et al.*⁶, ma następującą postać:

$$M = TE_c \cdot TP_c, \quad (3)$$

gdzie TE_c mierzy zmianę efektywności technicznej jednostki między okresami t i $t+1$, a TP_c określa postęp techniczny (technologiczny). Wzory opisujące TE_c i TP_c zawarto w tabeli 3.

Graficznie TE_c interpretuje się jako przesunięcie jednostki w kierunku granicy możliwości produkcyjnych wyznaczonej przez jednostkę wzorcową. Z kolei

⁵ Efektywność skali definiuje się jako iloraz miary efektywności technicznej wyznaczonej w modelu DEA o stałych korzyściach skali do miary efektywności technicznej obliczonej dla modelu zakładającego zmienne korzyści skali.

⁶ R. Färe *et al.*, *Productivity developments in Swedish hospitals: A Malmquist output index approach*, [w:] *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications*, red. A. Charnes *et al.*, Boston 1994.

TP_c oznacza przesunięcie empirycznej funkcji produkcji między okresami t i $t+1$ w modelu DEA o stałych korzyściach skali.

Rozkład (3) umożliwia analizę wpływu zmiany technicznej efektywności oraz zmiany technologii na zmianę produktywności danej jednostki. Inaczej mówiąc, przyczyną zmiany produktywności może być zmiana sposobu wykorzystania posiadanych przez jednostkę środków w ramach dostępnej technologii i/lub zmiana możliwości produkcyjnych (technologii).

Trójczynnikiowy rozkład indeksu produktywności Malmquista wykorzystujący miary technicznej efektywności w modelu DEA o zmiennych korzyściach skali zaproponowali Ray i Desli⁷. Rozkład ten jest następujący:

$$M = TE_v \cdot TP_v \cdot SE, \quad (4)$$

przy czym TE_v , TP_v i SE są takie jak w tabeli 3.

TE_v mierzy zmianę w czasie technicznej efektywności zorientowanej na nakłady, przy założeniu zmiennych korzyści skali — przesunięcie jednostki w kierunku granicy możliwości produkcyjnych wyznaczonej przez najefektywniejsze jednostki w badanej grupie, TP_v mierzy przesunięcie empirycznej funkcji produkcji między okresami t i $t+1$ w modelu DEA o zmiennych korzyściach skali, SE mierzy zmianę efektywności skali.

Odmienny rozkład na trzy czynniki przedstawili Färe *et al.*⁸. Autorzy zdekomponowali indeks produktywności w następujący sposób:

$$M = TE_v \cdot TP_c \cdot SE^*, \quad (5)$$

gdzie TE_v jest taki, jak w (4), TP_c jak w (3). Wzór opisujący SE^* zawiera tabela 3. Czynniki SE^* mierzy zmianę efektywności skali między okresami t i $t+1$.

W rozkładzie (5) produktywność jednostki zależy od jej położenia względem krzywej efektywności utworzonej przez najlepsze jednostki oraz zmiany produktywności jednostki wzorcowej. Rozkład ten skrytykowali między innymi Ray i Desli⁹.

Kolejny rozkład, który został zaproponowany w pracy Gilberta i Wilsona¹⁰, ma postać:

$$M = TE_v \cdot TP_v \cdot SE^* \cdot SB, \quad (6)$$

gdzie TE_v , TP_v są takie jak we wzorze (4), SE^* jak w rozkładzie (5). Czynniki SE , zdefiniowany w tabeli 3, interpretuje się jako obciążenie skali spowodowane zmianą techniczną (*scale bias of technical change*). SB jest średnią geometrycz-

⁷ S.C. Ray, E. Desli, *Productivity growth, technical progress, and efficiency change in industrialized countries: Comment*, „American Economic Review” 1997, 87 (5), s. 1033–1039.

⁸ R. Färe *et al.*, *Productivity growth, technical progress, and efficiency change in industrialized countries*, „American Economic Review” 1994, 84 (1), s. 66–83.

⁹ S.C. Ray, E. Desli, *op. cit.*

¹⁰ R.A. Gilbert, P.W. Wilson, *Effects of deregulation on the productivity of Korean banks*, „Journal of Economics and Business” 1998, nr 50 (2), s. 133–155.

ną ilorazu efektywności skali jednostki (x^{t+1}, y^{t+1}) oraz jednostki (x^t, y^t) względem technologii w okresach t i $t+1$. Jeśli efektywności skali jednostek (x^t, y^t) i (x^{t+1}, y^{t+1}) względem dwóch technologii różnią się, to zmiana techniczna jest obciążona względem korzyści skali.

Bardziej rozbudowaną wersję rozkładu indeksu produktywności Malmquista opracował Lovell¹¹. Autor zdekomponował postęp techniczny TP_v w rozkładzie Raya i Desli na trzy czynniki. W ten sposób otrzymał pięcioczynnikowy rozkład indeksu Malmquista. Dekompozycja Lovella dla indeksu zorientowanego na wyniki ma postać

$$M = TE_v \cdot TP_{v1} \cdot TP_{v2}^O \cdot TP_{v3}^O \cdot SE, \quad (7)$$

gdzie TE_v i SE są takie jak we wzorze (4), natomiast wzory opisujące TP_{v1} , TP_{v2}^O i TP_{v3}^O zestawiono w tabeli 3.

Czynnik TP_{v1} jest ilorzem wyniku, który uzyskuje jednostka efektywna, dysponująca nakładem na poziomie x^t , gdy technologia jest taka jak w okresie $t+1$, do wyniku uzyskanego przez jednostkę efektywną dysponującą nakładem na tym samym poziomie, w przypadku technologii z okresu t . Wyznaczając TP_{v1} , zakłada się, że granica efektywności jest obliczona w modelu DEA o zmiennych korzyściach skali. TP_{v1} mierzy zmianę techniczną jednostki dysponującej nakładem x^t , gdy granica efektywności jest wyznaczona przez najbardziej produktywne jednostki.

Czynnik TP_{v2}^O określa obciążenie wyniku spowodowane zmianą techniczną (*output bias of technical change*). Wielkość ta jest pierwiastkiem z ilorazu zmiany technicznej jednostki dysponującej nakładem x^{t+1} obliczonej w modelu DEA o zmiennych korzyściach skali do zmiany technicznej tej jednostki wyznaczonej w modelu DEA o stałych korzyściach skali. TP_{v2}^O interpretuje się także jako pierwiastek z ilorazu efektywności skali wyniku jednostki, która dysponuje nakładem x^{t+1} , obliczonej dla technologii w czasie $t+1$ do efektywności skali wyniku tej jednostki w przypadku technologii z okresu t .

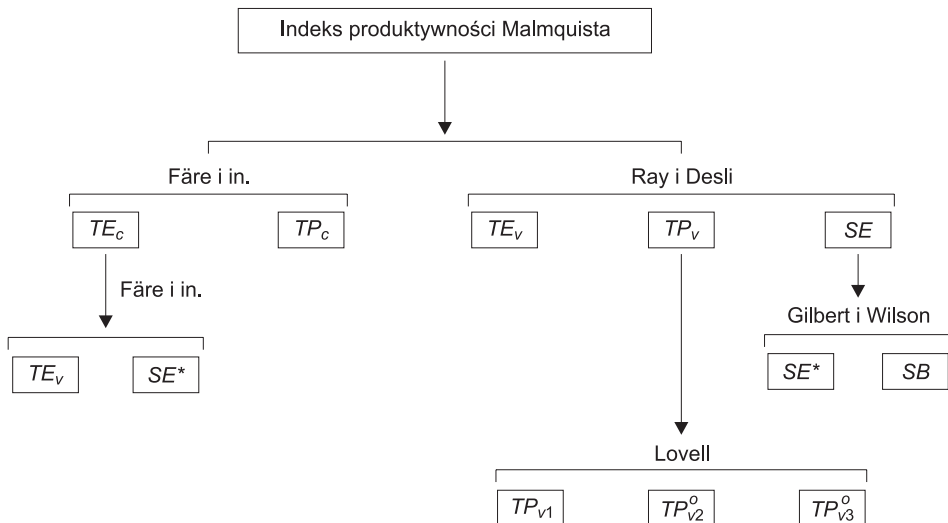
Czynnik TP_{v3}^O wyznacza się jako pierwiastek z ilorazu zmiany technicznej jednostki dysponującej nakładem x^{t+1} obliczonej w modelu DEA o stałych korzyściach skali do zmiany technicznej jednostki wykorzystującej nakład x^t w modelu DEA o zmiennych korzyściach skali. Według Lovella TP_{v3}^O określa obciążenie nakładu spowodowane zmianą techniczną (*input bias of technical change*). Jednakże wydaje się, że w przypadku tego czynnika trudno podać jednoznaczną interpretację ekonomiczną ze względu na to, że zestawia się zmiany techniczne obliczone przy różnych założeniach dotyczących poziomu nakładu i korzyści skali.

¹¹ C.A.K. Lovell, *The decomposition of Malmquist productivity indexes*, „Journal of Productivity Analysis” 2003, nr 20, s. 437–458.

Tabela 3. Czynniki rozkładów indeksu produktywności Malmquista

Oznaczenie	Wzór	Orientacja na wyniki	Orientacja na nakłady
TE_c	$\frac{\theta_c^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{\theta_c^t(x^t, y^t)}$	$\frac{y^{t+1}/d'}{y^t/b}$	$\frac{e'/x^{t+1}}{f/x^t}$
TP_c	$\sqrt{\frac{\theta_c^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{\theta_c^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \cdot \frac{\theta_c^t(x^t, y^t)}{\theta_c^{t+1}(x^t, y^t)}}$	$\sqrt{\frac{d'}{b} \cdot \frac{d}{b}}$	$\sqrt{\frac{f'}{e} \cdot \frac{f}{e}}$
TE_v	$\frac{\theta_v^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{\theta_v^t(x^t, y^t)}$	$\frac{y^{t+1}/c'}{y^t/a}$	$\frac{g'/x^{t+1}}{h/x^t}$
TP_v	$\sqrt{\frac{\theta_v^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{\theta_v^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \cdot \frac{\theta_v^t(x^t, y^t)}{\theta_v^{t+1}(x^t, y^t)}}$	$\sqrt{\frac{c'}{a} \cdot \frac{c}{a}}$	$\sqrt{\frac{h'}{g} \cdot \frac{h}{g}}$
SE	$\sqrt{\frac{SE^t(x^{t+1}, y^{t+1}) \cdot SE^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{SE_v^t(x^t, y^t) \cdot SE_v^{t+1}(x^t, y^t)}}$	$\sqrt{\frac{c'}{d'} \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{a'}{b'} \cdot \frac{b}{a}}$	$\sqrt{\frac{f'}{h'} \cdot \frac{h}{f} \cdot \frac{e'}{g'} \cdot \frac{g}{e}}$
SE^*	$\frac{SE^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{SE^t(x^t, y^t)}$	$\frac{c'}{d'} \cdot \frac{b}{a}$	$\frac{e'}{g'} \cdot \frac{h}{f}$
SB	$\sqrt{\frac{SE^t(x^{t+1}, y^{t+1}) \cdot SE^t(x^t, y^t)}{SE_v^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}) \cdot SE_v^{t+1}(x^t, y^t)}}$	$\sqrt{\frac{d'}{c'} \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{a'}{b'} \cdot \frac{a}{b}}$	$\sqrt{\frac{f'}{h'} \cdot \frac{f}{h} \cdot \frac{g'}{e'} \cdot \frac{g}{e}}$
TP_{v1}	$\frac{\theta_v^t(x^t, y^t)}{\theta_v^{t+1}(x^t, y^t)}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{h}{g}$
TP_{v2}^O	$\sqrt{\frac{\theta_v^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{\theta_v^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \cdot \frac{\theta_v^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{\theta_v^t(x^{t+1}, y^{t+1})}}$	$\sqrt{\frac{c'}{a'} \cdot \frac{d'}{b'}}$	
TP_{v3}^O	$\sqrt{\frac{\theta_v^{t+1}(x^t, y^t)}{\theta_v^t(x^t, y^t)} \cdot \frac{\theta_v^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{\theta_v^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}}$	$\sqrt{\frac{d'}{b'} \cdot \frac{c}{a}}$	

Źródło: opracowanie własne.



Ryc. 2. Związki między różnymi rozkładami indeksu Malmquista

Źródło: opracowanie własne.

Związki zachodzące między rozważanymi rozkładami indeksu produktywności Malmquista zaprezentowano na ryc. 2.

Zaproponowane w literaturze przedmiotu rozkłady indeksu produktywności Malmquista są ze sobą powiązane. Z dwuczynnikowego rozkładu Färe'a *et al.*¹² otrzymuje się rozkład trójczynnikowy¹³, w wyniku dalszej dekompozycji jednego z czynników. Rozkłady Gilberta i Wilsona¹⁴ czy Lovella¹⁵ są modyfikacjami trójczynnikowego rozkładu Raya i Desli¹⁶.

Porównanie poszczególnych rozkładów indeksu Malmquista dla danej jednostki zaprezentowano w przykładzie 1.

PRZYKŁAD 1

Rozważa się cztery jednostki decyzyjne $A-D$, które za pomocą jednego nakładu wytwarzają jeden produkt. Dane dotyczące nakładów i wyników w okresie t oraz $t+1$ (jednostki $A'-D'$) zawiera tabela 4.

Tabela 4. Poziomy nakładu i wyniku oraz produktywność jednostek $A-D$ oraz $A'-D'$

	A	B	C	D	A'	B'	C'	D'
x	3,8	3	4,5	8	5,5	2	3	6
y	2,5	2	4,5	6,5	6	3	6	8
y/x	0,658	0,6(6)	1	0,813	1,09	1,5	2	1,33

Źródło: opracowanie własne.

Spośród badanych jednostek najbardziej produktywną, zarówno w czasie t , jak i $t+1$, jest C . Jednostka ta wyznacza granicę możliwości produkcyjnych w obu okresach w modelu DEA o stałych korzyściach skali. Sposób wyznaczenia granic efektywności w okresie t i $t+1$, przy założeniu stałych i zmiennych korzyści skali, pokazano na ryc. 3.

W przykładzie oblicza się indeks Malmquista dla jednostki A oraz bada się różne czynniki, które mają wpływ na zmianę produktywności tej jednostki.

Ze wzoru (1) wynika, że indeks produktywności Malmquista dla jednostki A wynosi $M=1,658182$. Jednostka ta zwiększyła swoją produktywność między okresami t i $t+1$. Na ten wzrost wpłynęły różne czynniki. W tabeli 5 zestawiono rozkłady indeksu Malmquista zorientowanego na wyniki i nakłady.

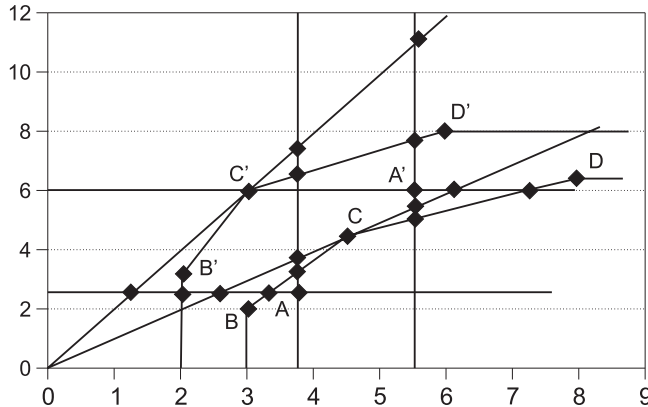
¹² R. Färe *et al.*, *Productivity developments...*

¹³ R. Färe *et al.*, *Productivity growth...*

¹⁴ R.A. Gilbert, P.W. Wilson, *op. cit.*

¹⁵ C.A.K. Lovell, *op. cit.*

¹⁶ S.C. Ray, E. Desli, *op. cit.*



Ryc. 3. Konstrukcja indeksu Malmquista zorientowanego na wyniki i na nakłady dla jednostki A
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5. Rozkłady indeksu Malmquista zorientowanego na wyniki i nakłady

Rozkład Färe'a et al.¹⁷: $M = TE_c \cdot TP_c$							
Orientacja na wyniki			Orientacja na nakłady				
TE_c	TP_c		TE_c	TP_c			
0,829091	2		0,829091	2			
Rozkład Raya i Desli: $M = TE_v \cdot TP_v \cdot SE$							
Orientacja na wyniki			Orientacja na nakłady				
TE_v	TP_v	SE	TE_v	TP_v	SE		
1,043478	1,721338	0,923172	0,628099	1,979583	1,333614		
Rozkład Färe'a et al.¹⁸: $M = TE_v \cdot TP_v \cdot SE^*$							
Orientacja na wyniki			Orientacja na nakłady				
TE_v	TP_c	SE^*	TE_v	TP_c	SE^*		
1,043478	2	0,794545	0,628099	2	1,32		
Rozkład Gilberta i Wilsona: $M = TE_v \cdot TP_v \cdot SE^* \cdot SB$							
Orientacja na wyniki				Orientacja na nakłady			
TE_v	TP_v	SE^*	SB	TE_v	TP_v	SE^*	SB
1,043478	1,721338	0,794545	1,161887	0,628099	1,979583	1,32	1,010314
Rozkład Lovella — orientacja na wyniki: $M = TE_v \cdot TP_{v1} \cdot TP_{v2}^O \cdot TP_{v3}^O \cdot SE$							
TE_v	TP_{v1}	TP_{v2}^O	TP_{v3}^O	SE			
1,043478	1,96	1	0,878234	0,923172			

Źródło: opracowanie własne.

¹⁷ R. Färe et al., *Productivity developments...*

¹⁸ R. Färe et al., *Productivity growth...*

Według rozkładu Färe'a *et al.*¹⁹ na zmianę produktywności jednostki *A* wpływa przede wszystkim zmiana technologii. W związku z tym, że dekompozycję przeprowadza się w modelu DEA o stałych korzyściach skali, orientacja indeksu Malmquista nie wpływa na jego rozkład.

Według dekompozycji Raya i Desli główną przyczyną zmian produktywności jednostki *A* są zmiany technologiczne, przy czym zmiana technologii ma większy wpływ na produktywność jednostki w przypadku orientacji na nakłady niż wyniki. Znaczenie pozostałych czynników zależy od orientacji indeksu. Na przykład, wpływ zmiany technicznej efektywności zorientowanej na wyniki na zmianę produktywności jednostki jest większy niż zmiany technicznej efektywności zorientowanej na nakłady. Produktywność jednostki *A* zmienia się w mniejszym stopniu pod wpływem zmian efektywności skali wyników niż nakładów.

Podobny wniosek wynika z rozkładu Färe'a *et al.*²⁰. Według rozkładu Gilberta i Wilsona zmiana efektywności skali wyników jest rezultatem głównie obciążenia skali spowodowanego zmianą techniczną.

Z rozkładu Lovella wynika, że na zmianę technologii wpływa przede wszystkim zmiana techniczna jednostki dysponującej nakładem z okresu *t*.

IV. PODSUMOWANIE

W literaturze przedmiotu istnieją różne rozkłady indeksu produktywności Malmquista. Inaczej mówiąc, wyodrębniono wiele czynników, które mają wpływ na zmianę produktywności danej jednostki. Poszczególne dekompozycje indeksu Malmquista są ze sobą powiązane. Jako bazowe wyróżnia się rozkłady Färe'a *et al.*²¹ oraz Raya i Desli, natomiast pozostałe stanowią rezultat dalszego ich rozkładu.

Zaprezentowane dekompozycje nie wyczerpują wszystkich możliwości rozkładu indeksu Malmquista. Niemniej jednak kolejne rozkłady, chociaż możliwe z technicznego punktu widzenia, stwarzają problemy interpretacyjne.

Spośród analizowanych rozkładów największą wartość aplikacyjną ma rozkład Raya i Desli.

¹⁹ R. Färe *et al.*, *Productivity developments...*

²⁰ R. Färe *et al.*, *Productivity growth...*

²¹ R. Färe *et al.*, *Productivity developments...*