JAKUB JERNAJCZYK
ORCID: 0000-0002-7416-5241
Akademia Sztuk Pięknych im. E. Gepperta we Wrocławiu

Jak pokazać to, czego pokazać nie można? O obrazowaniu liczb niewymiernych

How to show what cannot be shown?
On visualizing irrational numbers

Abstract: In this article, I would like to draw attention to the cognitive potential of an image, showing how significant the role of visual imagination in mathematics is. I will focus here mainly on the possibilities of visualizing irrational numbers. Our starting point is the intuitive case of the square root of two, observed in the diagonal of a square. We will also discuss a simple, geometrical method of constructing the square roots of all integers. Next, we move over to the *golden ratio*, hidden in a regular pentagon. We will use a looped, endless animation to visualize the irrational number φ . Then we will have a closer look at the famous number π and discuss two different attempts to find its visual representation. In the last two sections of the article, we consider the possibility of indicating rational and irrational real numbers and also grasp the whole set of real numbers. All the issues discussed in this article have inspired visual artists to create artworks that can help to understand relatively advanced mathematical problems.

Keywords: mathematics, visualization, irrational numbers, incommensurable line segments, real numbers, infinity

Wprowadzenie*

Informacje o świecie zewnętrznym w znakomitej mierze docierają do nas za pośrednictwem wzroku. Arystoteles zauważa to już w pierwszych zdaniach *Metafizyki*, pisząc, że „ze wszystkich zmysłów wzrok w najwyższym stopniu umożliwia nam poznanie”¹. Ta wyróżniona pozycja wizualności dotyczy nie tylko poznania potocznego — wizualność odgrywa też ważną rolę w poznaniu naukowym. Nauka nie jest bowiem odrębną ścieżką intelektualnego rozwoju człowieka, lecz w dużej mierze stanowi przedłużenie zdrowego rozsądku².

Nawet w wypadku dyscypliny tak abstrakcyjnej jak matematyka pierwotny pretekst i punkt wyjścia do naukowej refleksji tworzą zjawiska obserwowane w naturze³. Dopiero później następują uogólnienia i wnioski wykraczające poza rzeczywistość fizyczną. Właśnie takie, oderwane od doświadczenia, struktury matematyczne będą tematem niniejszego artykułu. Rozważymy możliwość unaoczniania pojęć, które, w wyniku stosowania abstrakcyjnego, sformalizowanego zapisu, straciły swój bezpośredni związek z obrazem. W szczególności przyjrzymy się liczbom niewymiernym, gdyż już sama ich nazwa sugeruje, iż powinny one wymykać się wszelkim próbom wizualizacji.

1. Zobaczyć niewymierne

Matematyka starożytnej Grecji niemal na samym początku swojej naukowej historii musiała zmierzyć się z poważnym kryzysem. Jego bezpośrednią przyczyną było dokonane przez pitagorejczyków odkrycie odcinków niewspółmiernych — odcinków, dla których nie można znaleźć wspólnej miary⁴. W ten oto sposób starożytnym geometrom objawiły się liczby niewymierne.

Odcinki niewspółmierne, których długości nie można wyrazić za pomocą liczb naturalnych ani proporcji takich liczb (ułamków), występują nawet w najprostszych figurach geometrycznych. Już w szkole podstawowej uczniowie zapoznają się z obrazowym przedstawieniem niewymiernego pierwiastka z dwóch w postaci przekątnej kwadratu, którego bok równy jest 1.

* Tekst jest poprawioną i rozszerzoną wersją artykułu J. Jernajczyk, *Irrational images — the visualization of abstract mathematical terms*, „Mathematica Applicanda” 43/2 (2015).

¹ Arystoteles, *Metafizyka*, 980a, tłum. K. Leśniak, Warszawa 2013, s. 21.

² Zob. W.V. Quine, *Zakres i język nauki*, tłum. B. Stanosz, [w:] *idem, Granice wiedzy i inne eseje filozoficzne*, Warszawa 1986, s. 28, 32.

³ Zob. P.J. Davis, R. Hersh, *Świat matematyki*, tłum. R. Duda, Warszawa 1994, s. 114, 141.

⁴ Odkrycie odcinków niewspółmiernych miało także poważne konsekwencje filozoficzne — w jego wyniku legły w gruzach fundamenty myśli pitagorejskiej, która liczbę utożsamiała z budulcem świata. Aby przezwyciężyć ów kryzys, starożytni myśliciele musieli znacząco przekonstruować swoją kosmologię. Ostatecznie liczba przestała być traktowana jako konkretna częśćka, swoista cegiełka budująca świat, lecz stała się czymś znacznie bardziej abstrakcyjnym — „zasadą” ukrytą głęboko w strukturze rzeczywistości (zob. M. Heller, *Uchwycić przemijanie*, Kraków 2010, s. 32).

Rys. 1. Przekątna kwadratu o boku równym 1 ma długość niewymierną równą $\sqrt{2}$

Odwołując się do twierdzenia Pitagorasa, uzyskujemy dostęp do prostej metody wizualizacji pierwiastków kwadratowych z wszystkich liczb naturalnych. Wychodząc od kwadratu o boku równym 1, możemy skonstruować prostokąt o wysokości równej 1 oraz podstawie równej $\sqrt{2}$. Długość przekątnej tego prostokąta równa będzie $\sqrt{3}$ (rys. 2).

Rys. 2. Geometryczna konstrukcja $\sqrt{3}$

Postępując konsekwentnie, za pomocą cyrkla i liniału możemy wyznaczać odcinki odpowiadające pierwiastkom z kolejnych liczb naturalnych (rys. 3), wśród których znakomitą część tworzą liczby niewymierne.

Rys. 3. Przekątna prostokąta o podstawie $\sqrt{n}$ i wysokości 1 ma długość równą $\sqrt{n+1}$

Do opisanej metody odwołała się malarka Monika Aleksandrowicz, dzieląc kwadratowy format obrazu na barwne pola, wyznaczone według przedstawionego schematu (rys. 4). Wykres ten zawierała również w opisie towarzyszącym pracy.

Rys. 4. Schemat wyjaśniający istotę obrazu M. Aleksandrowicz *RENEANS* (2008)

Choć zastosowane w obrazie rozwiązania kolorystyczne wynikały z autorskich decyzji artystki, podział płaszczyzny obrazu podporządkowany został w pełni ścisłej matematycznej konstrukcji⁵.

2. Złota liczba

Stosunek boku i przekątnej kwadratu nie był pierwszym odkrytym przez Greków stosunkiem niewymiernym. Obecnie uznaje się, że istnienie odcinków niewspółmiernych zostało po raz pierwszy dostrzeżone w boku i przekątnej pięciokąta foremnego⁶. Niewymierny stosunek tych odcinków określa się mianem „złotej proporcji”. Jej ścisłą definicję znajdujemy w VI księdze *Elementów* Euklidesa: „Mówi się, że prosta jest przecięta w stosunku skrajne do środkowej, gdy jak ona cała do większej odciętej, tak większa do mniejszej”⁷.

Rys. 5. Podział odcinka na dwie części, pozostające względem siebie w złotej proporcji

Przedstawiony na rysunku odcinek (rys. 5) podzielony został zgodnie z tą definicją. Prawdziwe zatem jest równanie:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

⁵ Por. J. Jernajczyk, *Sztuka inspirowana matematyką*, „Format” 82–83 (2019), s. 99–102.

⁶ Za odkrywcę odcinków niewspółmiernych uważany jest pitagorejczyk Hippos z Metapontu (zob. W. Wiśniewski, *Matematyka i jej historia*, Opole 1997, s. 35).

⁷ Euklides, *Elementy — teoria proporcji i podobieństwa*, tłum. P. Błaszczyk, K. Mrówka, Kraków 2013, s. 48.

Stosunek całości $a + b$ do dłuższego odcinka a równy jest stosunkowi dłuższego odcinka a do odcinka krótszego b .

Rozpisując to równanie, otrzymujemy:

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

Jeśli teraz złotą proporcję — stosunek odcinka dłuższego do odcinka krótszego — oznaczmy jako $\varphi = \frac{a}{b}$, równanie możemy zapisać w postaci:

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$$

Po kilku prostych przekształceniach otrzymujemy ostatecznie równanie kwadratowe:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Równanie to ma dwa rozwiązania, z których interesuje nas tylko rozwiązanie nieujemne:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Właśnie ta niewymierna złota liczba φ , której wartość w przybliżeniu wynosi 1,618, była dla starożytnych miarą doskonałej proporcji. Dostrzegłszy ją w przyrodzie, starali się odzwierciedlić ją w architekturze i sztuce⁸.

W celu zobrazowania matematycznej istoty złotej proporcji, śladem starożytnych geometrów, przyjrzyjmy się dokładniej pięciokątowi foremnemu. Bok i przekątna tej figury (rys. 6a) nie są jedynymi odcinkami, które pozostają względem siebie w złotym stosunku. Stosunek ten dotyczy również odcinków wewnętrznych (rys. 6b, c). Animowana sekwencja pozwala ukazać kolejne pary takich odcinków, powstające w wyniku konsekwentnego odejmowania odcinków krótszych od dłuższych. Procedura ta to słynny algorytm Euklidesa, którego celem jest „wyznaczenie wspólnej miary dwóch odcinków”⁹. W wypadku odcinków współmiernych po skończonej liczbie kroków różnica kolejnych odcinków wyniosłaby w końcu 0 i tym samym znaleziony zostałby ich wymierny stosunek. Jednak w przypadku odcinków niewspółmiernych, takich jak bok i przekątna pięciokąta foremnego, algorytm Euklidesa nigdy się nie zakończy — zawsze pozostawała będzie jakaś niezerowa reszta.

Przecinające się przekątne pięciokąta foremnego tworzą pentagram, wewnątrz którego powstaje kolejny pięciokąt foremny. Odcinki wyróżnione na rysunku

⁸ Złota proporcja jest jednym z głównych wątków refleksji dotyczącej związków matematyki z naturą i sztuką. Dogłębne omówienie tego zagadnienia znaleźć można w klasycznym już dziele M.C. Glyki, *Złota liczba. Rytuały i rytmy pitagorejskie w rozwoju cywilizacji zachodniej*, tłum. I. Kania, Kraków 2006.

⁹ A.B. Empacher *et al.*, *Mały słownik matematyczny*, Warszawa 1974, s. 14.

Rys. 6. J. Jernajczyk, *Reszta*, instalacja multimedialna, 2014 (uproszczone kadry), <https://vimeo.com/93545836>

(rys. 6c) tworzą bok i przekątną mniejszego pięciokąta. Po obróceniu i powiększeniu tej figury (rys. 6d) dochodzimy do stanu będącego symetrycznym odbiciem sytuacji wyjściowej, a ponowne przeprowadzenie analogicznej sekwencji kroków doprowadzi nas do układu początkowego (rys. 6a). Dzięki animowanej pętli możemy obserwować, jak w kolejnych skalach nieustannie odnawia się niewymierny stosunek boku i przekątnej. Ten ruchomy obraz złotej proporcji nie ma charakteru dokonanego, lecz rozwija się nieskończenie w czasie. Tym samym, w jasny i klarowny sposób, unaoczniony tu zostaje nierozwalny związek niewymierności z nieskończonością, który w zapisie algebraicznym wyrażany jest ułamkiem łańcuchowym:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

3. Portret π

Wśród liczb niewymiernych prawdopodobnie największą sławą cieszy się liczba π , występująca między innymi we wzorze na pole koła $S = \pi r^2$. Ten prosty wzór stał się dla mnie punktem wyjścia do graficznego przedstawienia liczby π . Zakładanym celem było znalezienie obrazu, który zawierałby w sobie matematyczny sens tej liczby, a nie był tylko jej umowną reprezentacją, jaką stanowi przecież grecki symbol „ π ”.

Liczbę π możemy obliczyć, dokonując prostego przekształcenia wzoru na pole koła:

$$\pi = \frac{S}{r^2}$$

Przyjrzyjmy się prawej stronie tego równania. S oznacza pole koła. Jego graficznym odpowiednikiem jest więc koło:

Podkreślmy, że nie jest to umowna reprezentacja pola koła. Powierzchnia koła jest w ścisłym sensie tożsama z jego polem¹⁰.

A czym jest obecne w mianowniku wyrażenie r^2 ? Jest to pole kwadratu o boku równym promieniowi koła r . Przedstawiamy je zatem w postaci kwadratu o danym boku:

Teraz możemy już przedstawić całą prawą stronę równania $\frac{S}{r^2}$ w postaci graficznej:

Obraz ten tworzy wizualny odpowiednik liczby π . W reprezentacji tej prawie całkowicie udało się wyeliminować symbole. Pole koła jest tu polem koła, a pole kwadratu — polem kwadratu. Nie potrzeba już umownych znaków S i r^2 , by wyrazić te pojęcia. Jedynym elementem, który pozostał z zapisu algebraicznego, jest pozioma kreska symbolizująca dzielenie. Aby się jej pozbyć, należałoby znaleźć

¹⁰ Przy czym trzeba zastrzec, że każde konkretne przedstawienie koła jest jedynie niedoskonałym przybliżeniem tej idealnej figury geometrycznej.

czytelny sposób graficznego przedstawiania na płaszczyźnie idei dzielenia dwóch wielkości. Propozycję takiej wizualizacji zawarłem w pracy *Portret Pi* (rys. 7), w której dzielenie koła przez kwadrat wyrażone zostało przenikaniem się tych figur¹¹.

Rys. 7. J. Jernajczyk, *Portret Pi*, druk cyfrowy, 100 × 100 cm, 2011

Omawiana tu propozycja wizualizacji liczby π może wydawać się oczywista. Jednak z rozmów prowadzonych przeze mnie z odbiorcami tej pracy wynika, że jej zrozumienie dla wielu osób jest istotnym odkryciem. Co więcej, często odkryciem okazuje się również pozornie banalny fakt, że r^2 odpowiada polu kwadratu o boku równym r . Świadczy to niestety o istotnych lukach w podstawowej edukacji matematycznej, nawet wśród osób mających wyższe wykształcenie. Przyczyn takiego stanu rzeczy należałoby upatrywać między innymi w złym programie nauczania, który wymusza na nauczycielach znaczną redukcję, działających na wyobraźnię ucznia, wyjaśnień obrazowych i zastąpienie ich efektywnymi, ale niekoniecznie intuicyjnymi i inspirującymi operacjami na symbolach¹².

4. Wyczerpywanie

W powyższej propozycji przedstawienia liczby π umyka gdzieś zasadniczy związek niewymierności z nieskończonością, który tak wyraźnie udało się wcześniej ukazać w odniesieniu do złotej liczby. W wypadku *Portretu Pi* koło potraktowane zostało jako dany widzialny obiekt, a przecież — ze względu na wpisaną w nie niewymierność — winno być ono zaledwie abstrakcyjną ideą, która nie posiada fizycznej reprezentacji. Warto byłoby zatem pokazać proces nieustannego przybliżania się do idealnego koła. W tym celu odwołamy się do starożytnej procedury geometrycznej, zwanej „metodą wyczerpywania”, której odkrywcą był pitagorejczyk Eudoksos. Chcąc przybliżyć pole skomplikowanej figury, greccy matematycy wpi-

¹¹ Warto zauważyć, że w wypadku koła o promieniu równym 1 pole kwadratu też ma wartość 1. Takie koło samo w sobie reprezentuje więc liczbę π i nie trzeba go już uzupełniać kwadratem. Jeśli jednak długość promienia nie jest znana, π można przedstawić jedynie w postaci ogólnej proporcji koła i kwadratu.

¹² Por. P.J. Davis, R. Hersh, *Świat matematyki*, s. 278.

sywali w nią i opisywali na niej figury, których pola potrafili z łatwością obliczać. Poszukiwany kształt był więc niejako „wyczerpywany” kształtami prostszymi¹³.

W wypadku koła wpisywano w nie i opisywano na nim wielokąty foremne. W każdej kolejnej iteracji, wraz ze wzrostem liczby boków, wielokąty coraz dokładniej przybliżały koło (rys. 8), a dokładna wartość jego pola zawsze zawarta była między polem wielokąta wpisanego a polem wielokąta opisanego na kole. Mistrzostwo w stosowaniu „metody wyczerpywania” osiągnął Archimedes, który w swych badaniach nad geometrycznymi własnościami koła posługiwał się nawet 96-kątami foremnymi¹⁴.

Rys. 8. Schemat „metody wyczerpywania” w odniesieniu do koła

Teoretycznie, posługując się tą metodą, można przybliżać pole koła z dowolnie ustaloną dokładnością, jednak jego pełna wartość nigdy nie będzie osiągnięta. Mamy tu zatem do czynienia z graficznym wyrażeniem nieskończonego dążenia do liczby niewymiernej. Ów dynamiczny charakter „metody wyczerpywania”, będący również podłożem interesujących metafor poznawczych¹⁵, zainspirował mnie do stworzenia instalacji multimedialnej pt. *Obraz wyczerpujący*¹⁶. Obserwujemy tutaj ewolucję wielokąta foremnego, którego liczba boków sukcesywnie się podwaja. Gdy jednak figura ta zaczyna wyraźnie przypominać koło, nagle znika z ekranu, przyskając niczym bańka mydlana. Idealnego koła nie sposób bowiem przedstawić w jakiegokolwiek materialnej formie.

5. Bezwymiarowe wskazania

Pierwszą księgę Euklidesowych *Elementów* rozpoczyna słynna definicja: „Punkt jest tym, co nie ma części”¹⁷. Oznacza to, że punkt nie ma żadnej wielkości, żadnego wymiaru. Rodzi się więc pytanie, czy istnieje jakaś metoda wskazywania takich

¹³ W podobny sposób radzono sobie z objętościami brył (zob. W. Więśław, *Matematyka i jej historia*, s. 39).

¹⁴ Por. V.J. Katz, *A History of Mathematics. An Introduction*, Boston 2009, s. 101.

¹⁵ Zob. J. Jernajczyk, B. Skowron, *Circle and sphere — geometrical speculations in philosophy*, [w:] *Mathematical Transgressions 2015*, P. Błaszczyk, B. Pieronkiewicz (ed.), Kraków 2018, s. 379–395.

¹⁶ J. Jernajczyk, *Obraz wyczerpujący*, instalacja wideo, 2016, <https://youtu.be/0j13jIEyTUg> [dostęp: 20.09.2020].

¹⁷ Euklides, *Elementy — teoria proporcji i podobieństwa*, s. 273.

bezwymiarowych punktów? Jak można wskazać bowiem coś, co nie zajmuje żadnej przestrzeni? Jakiego należałoby użyć w tym celu wskaźnika, skoro każdy, najcieńszy nawet wskaźnik zajmuje zawsze jakąś przestrzeń?

Rozwiązanie tego pozornie nierozwiązywalnego problemu okazuje się zaskakująco proste, a przy tym intuicyjne i obrazowe. Bezwymiarowy punkt można wskazać, przecinając prostą. Wyobraźmy sobie prozaiczną czynność krojenia chleba nożem kuchennym. Po przekrojeniu bochenka jego obydwie części znajdują się po dwóch stronach ostrza, zaś w samym miejscu cięcia nie pozostaje nic. Dokonując abstrakcyjnego przekroju prostej, wskazujemy więc bezwymiarowy punkt, w którym niczego nie ma, gdyż wszystko znajduje się po lewej bądź prawej stronie cięcia. Ta, z pozoru trywialna, obserwacja była punktem wyjścia do sformułowania ścisłej matematycznej metody definiowania liczb rzeczywistych, określanej mianem „przekrojów Dedekinda”¹⁸. Nieskończona prosta stanowi bowiem model zbioru liczb rzeczywistych, w którym punkty odpowiadają liczbom rzeczywistym, zarówno tym wymiernym, jak i niewymiernym¹⁹.

Podobny, choć o wymiar wyższy problem, wziął na warsztat twórczy Wiesław Gołuch, zadając pytanie: Jak przedstawić na papierze linię, która ma długość, lecz nie ma szerokości? W odpowiedzi wykreślił na arkuszu linię przerywaną oraz symbol nożyczek, a pracy nadał tytuł: *Wytnij sobie tę linię* (rys. 9). I faktycznie! Rozcięcie płaszczyzny wyznacza prostą, która nie ma szerokości, podobnie jak przecięcie prostej pozwoliło wskazać bezwymiarowy punkt.

Artysta nie odwoływał się przy tym do zaawansowanych pojęć i twierdzeń matematyki. Podstawą teoretyczną była dlań jedynie ta powszechnie znana definicja: „Linia zaś to długość bez szerokości”²⁰. Reszta była dziełem intuicji i wyobraźni wizualnej, którą w tym przypadku najtrafniej byłoby określić za Arnheimem „myśleniem wzrokowym”²¹.

Praca Gołucha ma charakter conceptualny. Jej istotą nie jest to, co bezpośrednio widzimy. Zaprezentowany obraz dla odbiorcy tworzy tylko pretekst i wskazówkę do dalszej refleksji. W tym konkretnym przypadku nie oglądamy samego aktu rozcięcia linii, lecz tylko znaki graficzne: przerywaną linię i symbol nożyczek, które sugerują nam owo rozcięcie. Taki sposób tworzenia i obcowania ze sztuką przypomina abstrakcyjne rozumowania, które zwykliśmy wiązać ze światem nauki. W matematyce często mamy do czynienia z obiektami, które mogą zaistnieć tylko w umyśle, na podstawie pewnych obrazowych przesłanek. Potrafimy na przykład unaocznić sobie idealne koło czy nieskończoną prostą, chociaż nie możemy zaobserwować takich obiektów w naturze. Potrafimy też wyobrazić sobie bezwymiarowe punkty, a przecież „nikt nigdy nie widział punktu i nikt nigdy go nie dotknął”²².

¹⁸ Zob. R. Dedekind, *Ciągłość i liczby niewymierne*, tłum. R. Murawski, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, R. Murawski (red.), Poznań 2003, s. 152–167.

¹⁹ Matematyczno-filozoficzny problem relacji między punktami na prostej a liczbami rzeczywistymi został poddany wnikliwej analizie w: P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Kraków 2007, s. 122–133.

²⁰ Euklides, *Elementy — teoria proporcji i podobieństwa*, s. 273.

²¹ R. Arnheim, *Myślenie wzrokowe*, tłum. M. Chojnacki, Gdańsk 2011.

²² B. Russell, *Nasza wiedza o świecie zewnętrznym*, tłum. T. Baszniak, Warszawa 2000, s. 122.

Rys. 9. W. Gołuch, *Wytnij sobie tę linię*, druk cyfrowy, $10 \times 50 \times 50$ cm, 2011

Warto przy tym pamiętać, że choć zazwyczaj doświadczenie jest punktem wyjścia i oparciem naszych abstrakcyjnych rozumowań, nie możemy automatycznie utożsamiać teoretycznych konstrukcji matematyki ze zjawiskami zachodzącymi w świecie fizycznym. Trzeba zawsze mieć na uwadze również to, że „*continuum* matematyczne jest czymś zupełnie innym niż *continuum* fizyków oraz metafizyków”²³.

6. Ogarniając *continuum*

Czym jest owo matematyczne *continuum*? Oznacza ono moc (w uproszczeniu mówiąc: liczebność) zbioru liczb rzeczywistych, na który składają się wszystkie liczby wymierne i niewymierne. *Continuum* utożsamiać można również z samym tym zbiorem lub ze zbiorem z nim równolicznym²⁴.

Do ścisłego pojęcia *continuum* odniósł się w jednej ze swoich prac Stanisław Dróżdż²⁵. Kwadratowe pole obrazu równomiernie wypełnił zerami, w jego zaś centrum umieścił znak przecinka (rys. 10). Obecność tego znaku wyraźnie sugeruje,

²³ H. Poincaré, *Nauka i hipoteza*, tłum. M.H. Horowitz, Warszawa 2012, s. 34.

²⁴ Zob. A.B. Empacher *et al.*, *Mały słownik matematyczny*, s. 40.

²⁵ Opis tego dzieła ukazał się również w nieznacznie zmienionej formie w: J. Jernajczyk, *Sztuka inspirowana matematyką*, s. 99–102.

części, otrzymamy ogromny, nieskończony wręcz zbiór możliwości. Ponadto, gdzieś w lewej górnej części, na początku tej abstrakcyjnej matrycy, może znajdować się znak plus bądź minus, co znowu rozszerza nasz potencjalny zbiór na liczby dodatnie i ujemne. Ostatecznie można więc stwierdzić, że poza pewnym podzbiorem, który został określony przez ustawienie zer w konkretnych, widocznych na obrazie miejscach, mamy tu do czynienia z prawie całym zbiorem liczb rzeczywistych.

Praca Dróždza jest jeszcze jednym reprezentatywnym przykładem sztuki konceptualnej, w którym to, co zostało bezpośrednio przedstawione, nie stanowi istoty dzieła, lecz tylko nakierowuje odbiorcę na jego prawdziwy sens. Na pierwszy rzut oka nie widzimy żadnej z rozpatrywanych tutaj liczb. Jednak po krótkiej refleksji jesteśmy w stanie dostrzec okiem umysłu nieskończony i nieprzeliczalny zbiór liczb rzeczywistych — *continuum*.

Podsumowanie

Wyobraźnia wzrokowa pozwala nam „zobaczyć” więcej, niż naprawdę widzimy. Między innymi w procesie wizualnej abstrakcji możemy zbliżać się do istoty wielu fundamentalnych pojęć matematycznych. Traktując obraz jako punkt wyjścia do dalszej refleksji, potrafimy wyobrażać sobie idealne okręgi, nieskończone proste i bezwymiarowe punkty. W proporcjach wielkości geometrycznych mamy szansę „dostrzec” liczby niewymierne, dynamiczna zaś ewolucja owych proporcji odkrywa przed nami nierozzerwalny związek niewymierności z nieskończonością.

Zawarty w obrazie potencjał poznawczy stwarza szerokie pole do działań w zakresie edukacji i popularyzacji nauki. Omawiane w artykule przykłady wyraźnie pokazują, że plastyczne przedstawianie istoty liczb niewymiernych nie jest zadaniem niemożliwym. Wydaje się jednak, że we współczesnym programie edukacji szkolnej zbyt szybko odchodzi się od wizualizacji geometrycznej na rzecz symbolicznego zapisu i operacji arytmetycznych. W efekcie u wielu uczniów występują wyraźne trudności w zrozumieniu znaczenia podstawowych zagadnień matematycznych, w tym liczb niewymiernych.

Powrót matematyki do obrazu jawi się więc jako ważne edukacyjne wyzwanie, w którego realizacji pomocna może okazać się sztuka. W artykule przedstawiłem przykłady realizacji artystycznych, które nie tylko zostały zainspirowane zagadnieniami matematyki, lecz także, przez obrazowe ujęcie, mają szansę przybliżyć i wyjaśniać te zagadnienia.

Większość z omawianych tutaj prac charakteryzuje się podejściem konceptualnym, w którym następuje wyraźne zbliżenie sztuki z nauką. Bliskość ta nie dotyczy jedynie podobieństwa podejmowanych problemów, ale przede wszystkim podobieństwa przyjmowanych metod. Na wzór uczonego tworzącego abstrakcyjne pojęcia artysta odkrywa intelektualną ścieżkę do obrazów, których nie sposób ująć czy też zrealizować w materii. Głównym narzędziem twórczym jest tu wyobraźnia wzrokowa, która choć ukształtowana pod wpływem danych zmysłowych, potrafi docierać do idei i obiektów daleko wykraczających poza sensualną rzeczywistość.

Bibliografia

- Arnheim R., *Myślenie wzrokowe*, tłum. M. Chojnacki, Gdańsk 2011.
- Arystoteles, *Metafizyka*, tłum. K. Leśniak, Warszawa 2013.
- Błaszczyk P., *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Kraków 2007.
- Davis P.J., Hersch R., *Świat matematyki*, tłum. R. Duda, Warszawa 1994.
- Dedekind R., *Ciągłość i liczby niewymierne*, tłum. R. Murawski, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, R. Murawski (red.), Poznań 2003, s. 152–167.
- Empacher A.B. et al., *Mały słownik matematyczny*, Warszawa 1974.
- Euklides, *Elementy — teoria proporcji i podobieństwa*, tłum. P. Błaszczyk, K. Mrówka, Kraków 2013.
- Ghyka M.C., *Złota liczba. Rytuały i rytmy pitagorejskie w rozwoju cywilizacji zachodniej*, tłum. I. Kania, Kraków 2006.
- Heller M., *Uchwycić przemijanie*, Kraków 2010.
- Jernajczyk J., *Irrational images — the visualization of abstract mathematical terms*, „Mathematica Applicanda” 43/2 (2015).
- Jernajczyk J., *Sztuka inspirowana matematyką*, „Format” 82–83 (2019), s. 99–102.
- Jernajczyk J., Skowron B., *Circle and sphere — geometrical speculations in philosophy*, [in:] *Mathematical Transgressions 2015*, P. Błaszczyk, B. Pieronkiewicz (ed.), Kraków 2018, s. 379–395.
- Katz V.J., *A History of Mathematics. An Introduction*, Boston 2009.
- Łubowicz E., *Poezja konkretna Stanisława Dróżdża — matematyka w poezji*, [w:] *Człowiek, kultura, historia*, E. Dobierzewska-Mozrzyńskas, A. Jezierski (red.), Wrocław 2011, s. 235–250.
- Pajączek M., *Poetyka „Pojęciokształtów”. O poezji konkretnej Stanisława Dróżdża*, „Dyskurs” 10 (2010), s. 84–110.
- Poincaré H., *Nauka i hipoteza*, tłum. M.H. Horowitz, Warszawa 2012.
- Quine W.V., *Zakres i język nauki*, [w:] *idem, Granice wiedzy i inne eseje filozoficzne*, tłum. B. Stanosz, Warszawa 1986, s. 27–47.
- Russell B., *Nasza wiedza o świecie zewnętrznym*, tłum. T. Baszniak, Warszawa 2000.
- Więśław W., *Matematyka i jej historia*, Opole 1997.